# מתמטיקה בדידה – סמסטר א תשע"ב – תרגיל 6 – עוצמות

**תרגילים להגשה: 2 א,ד. 4. 5 ב,ג,ד. 7 ב. 8 ב,ד. 10 ב,ג, 12 , 13.**

**~~1. הוכח:  א. ע"פ ההגדרה ב. באמצעות משפט קנטור-ברנשטיין.~~**

**2. בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא פונקציה חח"ע ועל בין הקבוצות –**

**א.  ו- **

הוכחנו שהפונקציה הפיכה מימין ומשמאל, ולכן היא חח"ע ועל.

ליתר שאת נוכיח שקצות התחום מתאימים לקצות הטווח:

**~~ב.  ו- ~~**

**~~ג.  ו- ~~**

**ד.  ו-  תוכל להשתמש בפונקציה אשר מצאת ב-1 א.**

פונקציה זו היא חח"ע ועל כפי שהוכח בתרגול ובשיעור הנוסף (לגבי הפונקציה משאלה 1א).

פונקציה זו היא הרכבה של פונקציות חח"ע ועל (f הוכחה בסעיף א') ולכן היא חח"ע ועל.

**~~3. א. הוכח שכל אחת מהקבוצות  ו  שקולה ל-.~~**

**~~ב. הוכח : אם A ו-B שתי קבוצות זרות אשר כל אחת מהן שקולה ל-, אז גם שקולה ל-.~~**

הערה: הדבר נכון גם אם הן קבוצות שאינן זרות, אלא שההוכחה יותר מסובכת.

**4. נתון:  . הוכח/י : . האם גם הכיוון ההפוך נכון? נמק.**

ע"פ הנתון קיימת פונקציה חח"ע ועל . נראה כי ניתן ליצור פונקציה חח"ע

נוכיח כי הינה חח"ע. נניח ונוכיח כי . נתפצל לשלש אפשרויות שהן ארבע:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (או ההיפך – כי הכל סימטרי) |
|  | חח"ע, ולכן: | הגענו לסתירה ולכן הדבר לא ייתכן! |

משיקולי סימטריה ניתן לבנות פונקציה דומה , וע"פ משפט קנטור-ברנשטיין עוצמות הקבוצות שוות, כנדרש.

**5. נתון:  קבוצות כלשהן כך ש:  ו- .**

* 1. **~~הוכח או הפרך : .~~**

נכון. הדבר הוכח על הלוח בתרגול, ובתרגול הנוסף.

* 1. **הוכח או הפרך: .**

לא נכון. דוגמא נגדית:

* 1. **הוכח או הפרך: .**

לא נכון. דוגמא נגדית: 4 הקבוצות הנ"ל מסעיף ב'.

* 1. **בכל סעיף בו הפרכת את הטענה ענה שנית כאשר נתון בנוסף כי .**

שני המשפטים נכונים.

לסעיף ב': ולכן קיימת חח"ע ועל. ולכן קיימת חח"ע ועל.

נראה פונקציה חח"ע בין האיחודים:

הפונקציה חח"ע כי הינן חח"ע על טווחים שונים (אם , ו שניהם שייכים לאותה קבוצה מקורית – הרי שהם עברו דרך פונקציה חח"ע ולכן הם זהים. אם אחד מהם שייך לA והשני לC – לא ייתכן שהם יגיעו לאותו טווח כאשר ).

משיקולי סימטריה ניתן ליצור פונקציה דומה בכיוון ההפוך, וע"פ משפט קנטור-ברנשטיין עוצמות הקבוצות שוות, כנדרש.

לסעיף ג': ע"פ הנתון שהקבוצות זרות, מתקיים , וכבר נתון כי .

* 1. **~~הוכח כי לכל שתי קבוצות  מתקיים: .~~**

ק.ל. כי היא חח"ע ועל.

**~~6. תהיינה A ו-B קבוצות כך שקיימת פונקציה מ-A על B. הוכח/י: .~~**

**7. הוכח/י ע"פ ההגדרה:**

**~~א. ~~ ב.  ~~ג. ~~**

סעיף ב': צריך למצוא פונקציה חח"ע ועל בין הקטעים המדוברים:

נוכיח כי הפונקציה היא חח"ע, ע"י שנניח כי ונוכיח .

נוכיח כי הפונקציה היא על, ע"י שנוכיח כי גבולותיה מתאימים לקצות הקטע הנדרש, ומכיון שהפונקציה היא רציפה – לכן היא מכסה את כל הטווח.

**8. הוכח/י:**

**~~א. ~~**

**ב. **

בהרצאה הוכח כי , וע"פ 5 א' נובע מכך כי , ומכיון שהוכח בהרצאה גם כי , קיבלנו את השויון הטרנזיטיבי:

**~~ג. ~~**

בהרצאה הוכח כי , וע"פ 5 א' נובע מכך כי , ולכן די להוכיח כי:

את זה מוכיחים ע"י פ. חח"ע של שזירת המספרים: . מהצד השני קיימת פ. חח"ע של , וע"פ משפט קנטור-ברנשטיין העוצמות שוות.

(ההוכחה במלואה הוצגה על הלוח ע"י ד"ר בגנו בתרגול-הנוסף).

**ד. **

מכיון שכבר ידוע (מסעיף ג') ש: , לכן די להראות פונקציה חח"ע ועל

ברור שזוהי הגדרת המספר המרוכב, ולכן ישנו שויון חח"ע ועל בין שתי ההצגות.

**~~9. הוכח: אם  אז גם  לכל k טבעי כאשר  (k פעמים).~~**

הוכחה כמעט טריוויאלית באינדוקציה על k.

**10.**

1. **~~מהי עוצמת קבוצת הסדרות החשבוניות אשר כל איבריהן מספרים שלמים ?~~**

סדרה חשבונית מיוצגת ע"י שני מספרים (איבר ראשון ואיבר ההפרש), ולכן ניתן לומר שמדובר על זוג סדור של איברים שלמים כלומר , שעוצמת הקבוצה הזאת היא (כנ"ל 8ב).

1. **מהי עוצמת קבוצת הסדרות החשבוניות העולות אשר כל איבריהן מספרים רציונליים ?**

סדרה חשבונית מיוצגת ע"י שני מספרים (איבר ראשון ואיבר ההפרש), ולכן ניתן לומר שמדובר על זוג סדור של איברים שלמים כלומר . מכיון שידוע כי , וע"פ 5א, וע"פ הידוע גם כי , מתקבל השויון: .

1. **מהי עוצמת קבוצת כל הפונקציות הריבועיות (בעלות מקדמים ממשיים) אשר יש להן שני שורשים ממשיים ?**

נסמן עוצמה זו כ

ע"פ המשפטים המתאימים באלגברה, ניתן לתאר את כל הפונקציות האלו כך (כאשר ):

כלומר, ניתן לאפיין כל משוואה כזו ע"י זוג סדור של שני הפתרונות, ועוד איבר בודד שהוא המקדם a.

נסמן את הקבוצה להיות

לאחר האילוץ שמונע כפילויות ניתן למצוא פונקציה חח"ע מהפונקציות האלו אל , שהיא תהיה ומכיון שידוע כי , וע"פ 5א נקבל

ניתן כמובן למצוא פ. חח"ע מהקטע לקבוצה זו, ע"י: , ומכאן , וע"פ משפט קנטור-ברנשטיין קיבלנו שגם עוצמת קבוצה זו היא .

**~~11. נגדיר יחס S על :  כאשר .~~**

1. **~~הוכח/י שהיחס S הוא יחס שקילות.~~**
2. **~~יהי . מהי עוצמת ?~~**

עוצמת מחלקת השקילות היא , מכיון שהמחלקה מכילה בתוכה בדיוק איבר אחד לכל מספר שלם.

1. **~~מהי עוצמת (אוסף מחלקות השקילות) ?~~**

עוצמת קבוצת המנה היא מכיון שכל נקודה בקטע נמצאת במחלקה בפני-עצמה.

**12. א. הוכח שלא קיימת קבוצה בת מניה של ישרים אשר מכסה את כל המישור.   
 הדרכה – התבונן על קבוצת כל הנקודות השייכות למעגל כלשהו.   
 מותר להשתמש בכך שאיחוד בן מניה של קבוצות סופיות הוא קבוצה בת מניה.**

**ב. מהי עוצמת קבוצת כל הישרים במישור?**

**13. א. הוכח: קבוצת הסדרות של מספרים טבעיים אינה בת מניה.**

**ב. הוכח: קבוצת הסדרות העולות ממש של מספרים טבעיים אינה בת מניה.**

**הדרכה: תוכל להיעזר בסעיף א.**

**~~14.~~**

1. **~~מהי עוצמת קבוצת תתי הקבוצות הסופיות של קבוצת המספרים הטבעיים?~~**
2. **~~תת קבוצה של קבוצת המספרים הטבעיים תיקרא קבוצה קו-סופית כאשר המשלימה שלה ביחס לקבוצת המספרים הטבעיים היא קבוצה סופית.   
   מהי עוצמת קבוצת תתי הקבוצות הקו-סופיות של קבוצת המספרים הטבעיים?~~**
3. **~~האם עוצמת קבוצת כל התת קבוצות של המספרים הטבעיים שווה ל-~~**
4. **~~עוצמת קבוצת תתי הקבוצות הסופיות של קבוצת המספרים הטבעיים?~~**
5. **~~עוצמת קבוצת תתי הקבוצות הקו-סופיות של קבוצת המספרים הטבעיים?~~**