# מתמטיקה בדידה – סמסטר א תשע"ב – תרגיל 6 – עוצמות

**תרגילים להגשה: 2 א,ד. 4. 5 ב,ג,ד. 7 ב. 8 ב,ד. 10 ב,ג, 12 , 13.**

לפני פתרון התרגיל אכתוב כאן למה, כדי להשתמש בה בהמשך כמה פעמים:

למה: .

הוכחה: קיימת פ. חח"ע ע"י (פונקציית זהות היא תמיד חח"ע).

הערה: בהרבה מקומות אומרים "משפט קנטור-שרודר-ברנשטיין", אבל כנראה שאנחנו גזענים ולכן אנחנו מזכירים רק את קנטור (שאבא שלו היה יהודי) ואת ברנשטיין (שהיה יהודי), ומשמיטים את שרודר שכנראה לא היה לו קשר ליהדות ☺.

**~~1. הוכח:  א. ע"פ ההגדרה ב. באמצעות משפט קנטור-ברנשטיין.~~**

בתרגול הנוסף נאמר שאחת הפונקציות המתאימות להוכחה זו היא:

שם הוכח ג"כ שהיא חח"ע ועל. אשתמש בה בהמשך ללא הוכחה.

**2. בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא פונקציה חח"ע ועל בין הקבוצות – תוכל להשתמש בפונקציה אשר מצאת ב-1 א.**

**א.  ו- **

כל פונקציה ליניארית היא חח"ע ורציפה ולכן היא "על" לגבי הטווח שלה. נותר רק לוודא שקצות התחום מתאימים לקצות הטווח:

**~~ב.  ו- ~~**

**~~ג.  ו- ~~**

**ד.  ו- **

כל פונקציה ליניארית היא חח"ע ורציפה ולכן היא "על" לגבי הטווח שלה. נותר רק לוודא שקצות התחום מתאימים לקצות הטווח:

הפונקציה F היא הפונקציה משאלה 1א שהיא חח"ע ועל, והיא מוגדרת בדיוק על התחום והטווח הרצויים לנו. על-סמך זה נוכיח כי הינה חח"ע ועל.

ראשית נוכיח שהיא על. יהי , אז צריך למצוא לו מקור בקטע . אם אז המקור שלו הוא 0, ואם לא אז המקור שלו הוא .

ועכשיו נפנה להוכחה שהיא חח"ע. יהיו , המקיימים . נתפצל לשתי אפשרויות:

אם , אז כיון שהטווח של לא מכיל את 0, והאפשרות היחידה לקבל 0 בפונקציה היא כאשר היא מופעלת על 0.

אם אז וגם כיון שהאפשרות היחידה לקבל מספר שונה מ0 בפונקציה היא כאשר היא מופעלת על מספר שונה מ0. מכיון שכך נגיע למסקנא שמתקיים , ומכיון ש חח"ע לכן .

כל פונקציה ליניארית היא חח"ע ורציפה ולכן היא "על" לגבי הטווח שלה. נותר רק לוודא שקצות התחום מתאימים לקצות הטווח:

פונקציה זו היא הרכבה של פונקציות חח"ע ועל ולכן היא חח"ע ועל.

**~~3. א. הוכח שכל אחת מהקבוצות  ו  שקולה ל-.~~**

זה קטע פתוח וקטע סגור. עיין לעיל 1-2, בשיעורים ובתרגולים...

**~~ב. הוכח : אם A ו-B שתי קבוצות זרות אשר כל אחת מהן שקולה ל-, אז גם שקולה ל-.~~**

נעשה מאחת מהן התאמה לקבוצה ומהשניה ל, ומהאיחוד לקטע , וד"ל.

הערה: הדבר נכון גם אם הן קבוצות שאינן זרות, אלא שההוכחה דורשת שימוש במשפט קנטור-ברנשטיין.

**4. נתון:  . הוכח/י : . האם גם הכיוון ההפוך נכון? נמק.**

ע"פ הנתון קיימת פונקציה חח"ע ועל . נראה כי ניתן ליצור פונקציה חח"ע

נוכיח כי הינה חח"ע. נניח ונוכיח כי . נתפצל לשלש אפשרויות שהן ארבע:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (או ההיפך – כי הכל סימטרי) |
|  | חח"ע, ולכן: | הגענו לסתירה ולכן הדבר לא ייתכן! |

משיקולי סימטריה ניתן לבנות פונקציה דומה , וע"פ משפט קנטור-ברנשטיין עוצמות הקבוצות שוות, כנדרש.

(לכאורה ניתן להוכיח כי היא על, וכי היא ההופכית שלה, אבל יותר קצר להגיד "משפט קנטור-ברנשטיין" ☺)

הכיוון ההפוך נכון בקבוצות סופיות בלבד, והוא ניתן להוכחה בקלות ע"י דיאגרמת-וון וכיו"ב. בקבוצות אינסופיות ייתכן שהפרשי הקבוצות יהיו מסדרי גודל שונים.

לדוגמא: , , , אך ומאידך .

(שלשת הקבוצות שכתבתי שהן מעצמה מוכלות ב ומכילות את או את השקול ל [ היא חח"ע ועל בין שני תחומים אלו], וע"פ הלמה שבראש התרגיל עם משפט קנטור-ברנשטיין העוצמות שוות).

**5. נתון:  קבוצות כלשהן כך ש:  ו- .**

* 1. **~~הוכח או הפרך : .~~**

נכון. הדבר הוכח על הלוח בתרגול, ובתרגול הנוסף.

* 1. **הוכח או הפרך: .**

לא נכון. דוגמא נגדית:

* 1. **הוכח או הפרך: .**

לא נכון. דוגמא נגדית: 4 הקבוצות הנ"ל מסעיף ב'.

* 1. **בכל סעיף בו הפרכת את הטענה ענה שנית כאשר נתון בנוסף כי .**

שני המשפטים נכונים.

לסעיף ב': ולכן קיימת חח"ע ועל. ולכן קיימת חח"ע ועל.

נראה פונקציה חח"ע בין האיחודים:

הפונקציה חח"ע כי הינן חח"ע על טווחים שונים (אם , ו שניהם שייכים לאותה קבוצה מקורית – הרי שהם עברו דרך פונקציה חח"ע ולכן הם זהים. אם אחד מהם שייך לA והשני לC – לא ייתכן שהם יגיעו לאותו טווח כאשר ).

משיקולי סימטריה ניתן ליצור פונקציה דומה בכיוון ההפוך, וע"פ משפט קנטור-ברנשטיין עוצמות הקבוצות שוות, כנדרש.

לסעיף ג': ע"פ הנתון שהקבוצות זרות, מתקיים , וכבר נתון כי .

* 1. **~~הוכח כי לכל שתי קבוצות  מתקיים: .~~**

ק.ל. כי היא חח"ע ועל.

**~~6. תהיינה A ו-B קבוצות כך שקיימת פונקציה מ-A על B. הוכח/י: .~~**

אם קיימת פונקציה "על" מA לB אז קיימת פונקציה חח"ע מB לA וד"ל.

**7. הוכח/י ע"פ ההגדרה:**

**~~א. ~~ ב.  ~~ג. ~~**

צריך למצוא פונקציה חח"ע ועל בין הקבוצות המדוברות:

לסעיף א': או כאשר .

לסעיף ב':

הפונקציה היא חח"ע ורציפה, כי הנגזרת שלה מוגדרת לכל אורך הקטע, והיא אף פעם לא מתאפסת.

נוכיח כי הפונקציה היא על, ע"י שנוכיח כי גבולותיה מתאימים לקצות הקטע הנדרש, ומכיון שהפונקציה היא רציפה – לכן היא מכסה את כל הטווח.

*לסעיף ג':*

**8. הוכח/י:**

**~~א. ~~**

בהרצאה הוכח כי , וע"פ 5 א' נובע מכך כי , ומכיון שקיימת פונקציה חח"ע ועל   
 ע"י , לכן העוצמות שוות.

**ב. **

בהרצאה הוכח כי , וע"פ 5 א' נובע מכך כי , ומכיון שהוכח בהרצאה גם כי , קיבלנו את השויון הטרנזיטיבי:

**~~ג. ~~**

בהרצאה הוכח כי , וע"פ 5 א' נובע מכך כי , ולכן די להוכיח כי:

את זה מוכיחים ע"י פ. חח"ע של שזירת המספרים: . מהצד השני קיימת פ. חח"ע של , וע"פ משפט קנטור-ברנשטיין העוצמות שוות.

(ההוכחה במלואה הוצגה על הלוח ע"י ד"ר בגנו בתרגול-הנוסף).

**ד. **

מכיון שכבר ידוע (מסעיף ג') ש: , לכן די להראות פונקציה חח"ע ועל

ברור שזוהי הגדרת המספר המרוכב, ולכן ישנו שויון חח"ע ועל בין שתי ההצגות.

**~~9. הוכח: אם  אז גם  לכל k טבעי כאשר  (k פעמים).~~**

הוכחה באינדוקציה על k, ובהתחשב בכך שהפונקציה היא הפיכה.

**10.**

1. **~~מהי עוצמת קבוצת הסדרות החשבוניות אשר כל איבריהן מספרים שלמים ?~~**

סדרה חשבונית מיוצגת ע"י שני מספרים (איבר ראשון ואיבר ההפרש), ולכן ניתן לומר שמדובר על זוג סדור של איברים שלמים כלומר , שעוצמת הקבוצה הזאת היא (כנ"ל 8ב).

1. **מהי עוצמת קבוצת הסדרות החשבוניות העולות אשר כל איבריהן מספרים רציונליים ?**

נסמן את קבוצת הסדרות החשבוניות אשר כל איבריהן מספרים רציונליים בסימון . ואת הקבוצה המדוברת בשאלה באות A.

סדרה חשבונית מיוצגת ע"י שני מספרים (איבר ראשון ואיבר ההפרש), ולכן ניתן לומר שמדובר על זוג סדור של איברים רציונליים כלומר . מכיון שידוע כי , וע"פ 5א, וע"פ הידוע גם כי , מתקבל השויון הטרנזיטיבי:

נשים לב שמתקיים , וע"פ הלמה שבראש התרגיל מתקיים . מאידך לכל מספר טבעי ניתן להתאים סדרה עולה ממש על ידי , ולכן מתקיים , וע"פ משפט קנטור-ברנשטיין מתקיים .

1. **מהי עוצמת קבוצת כל הפונקציות הריבועיות (בעלות מקדמים ממשיים) אשר יש להן שני שורשים ממשיים ?**

ע"פ המשפטים המתאימים באלגברה, ניתן לתאר את כל הפונקציות האלו כך (כאשר ):

כלומר, ניתן לאפיין כל משוואה כזו ע"י זוג סדור של שני הפתרונות, ועוד איבר בודד שהוא המקדם a. נוסיף אילוץ למנוע כפילויות, נסמן את הקבוצה שלנו באות A, ונגדיר אותה כך:

מכיון שידוע כי , וע"פ 5א, וע"פ הלמה דלעיל (בראש התרגיל) נקבל:

ניתן כמובן למצוא פ. חח"ע מהקטע לקבוצה זו, ע"י: , ומכאן , וע"פ משפט קנטור-ברנשטיין קיבלנו שגם עוצמת קבוצה זו היא .

**~~11. נגדיר יחס S על :  כאשר .~~**

1. **~~הוכח/י שהיחס S הוא יחס שקילות.~~**

כמעט טריוויאלי...

1. **~~יהי . מהי עוצמת ?~~**

עוצמת מחלקת השקילות היא , מכיון שהמחלקה מכילה בתוכה בדיוק איבר אחד לכל מספר שלם.

1. **~~מהי עוצמת (אוסף מחלקות השקילות) ?~~**

עוצמת קבוצת המנה היא מכיון שכל נקודה בקטע נמצאת במחלקה בפני-עצמה.

**12. א. הוכח שלא קיימת קבוצה בת מניה של ישרים אשר מכסה את כל המישור.   
 הדרכה – התבונן על קבוצת כל הנקודות השייכות למעגל כלשהו.   
 מותר להשתמש בכך שאיחוד בן מניה של קבוצות סופיות הוא קבוצה בת מניה.**

נניח בשלילה כי קיימת קבוצה בת מניה של ישרים אשר מכסה את כל המישור. נסמן קבוצה זו באות L, ונאמר:

נסמן את קבוצת הנקודות השייכות למעגל היחידה באות A:

הפונקציה מתאימה לכל ישר את קבוצת הנקודות בהן הוא חותך את המעגל, ולכן הקבוצה היא בת-מניה. ע"פ ההנחה כי קבוצת הישרים מכסה את כל המישור, אז מתקיים:

*ע"פ כללי הגיאומטריה האוקלידית* העוצמה של כל קבוצה היא 0 (לישרים זרים למעגל), 1 (לישרים המשיקים למעגל) או 2 (לישרים החותכים את המעגל), ולכן כל הקבוצות האלו הינן קבוצות סופיות, ומכיון ש"**איחוד בן מניה של קבוצות סופיות הוא קבוצה בת מניה**" לכן **הקבוצה A היא בת מניה**.

מאידך ברור ש**הקבוצה A איננה בת מניה**, כי קיימת פונקציה חח"ע מהקטע לA ע"י .

הגענו לסתירה. מ.ש.ל.

**ב. מהי עוצמת קבוצת כל הישרים במישור?**

כל הישרים במישור יכולים להיות מיוצגים ע"י , כלומר ע"י שלשה סדורה של מספרים ממשיים, ולכן עוצמת קבוצתם קטנה או שווה לעוצמת שהיא (כנ"ל 9, בהתחשב בשאלה 8ג). מאידך כל הישרים המאונכים לציר הX וחותכים את הקטע מיוצגים ע"י , כלומר ע"י מספר בודד מהקטע הזה, ולכן עוצמת קבוצת כל הישרים במישור גדולה או שווה לעוצמת שהיא ג"כ , וע"פ משפט קנטור-ברנשטיין מתקבל שעוצמת קבוצת כל הישרים במישור הינה בדיוק .

**13. א. הוכח: קבוצת הסדרות של מספרים טבעיים אינה בת מניה.**

### הוכחה ראשונה – לפני שהבודק נתן לי את הרעיון הבא:

נסמן את קבוצת הסדרות של מספרים טבעיים באות A, וכדי לכלול את שני הסעיפים נגביל את עצמנו לסדרות עולות-ממש.

נותר "רק" להוכיח שפונקציה זו היא אכן חח"ע:

יהיו כך ש, כלומר . עלינו להוכיח כי .

נניח בשלילה כי , ונבחר :

הגענו לסתירה (קיבלנו כי ביטוי מסוים הוא קטן ממש מעצמו), וכך הוכחנו כי הפונקציה הינה חח"ע.

### הוכחה שניה – בתודה לבודק התרגילים:

כל מספר ממשי בקטע ניתן להכתב בצורת , כידוע.

נסמן את קבוצת הסדרות של מספרים טבעיים באות B.

(הגדרתי כדי להימלט מהמספר 0 שאיננו כ"כ טבעי.)

זוהי פונקציה חח"ע, כמובן, ולכן , ומכאן שעוצמת היא לפחות , ולכן איננה בת מניה.

**ב. הוכח: קבוצת הסדרות העולות ממש של מספרים טבעיים אינה בת מניה.**

**הדרכה: תוכל להיעזר בסעיף א.**

כל ההוכחה היא זהה ממש לסעיף הקודם, אך הסדרות יהיו בתבנית הבאה:

**~~14.~~**

1. **~~מהי עוצמת קבוצת תתי הקבוצות הסופיות של קבוצת המספרים הטבעיים?~~**
2. **~~תת קבוצה של קבוצת המספרים הטבעיים תיקרא קבוצה קו-סופית כאשר המשלימה שלה ביחס לקבוצת המספרים הטבעיים היא קבוצה סופית.   
   מהי עוצמת קבוצת תתי הקבוצות הקו-סופיות של קבוצת המספרים הטבעיים?~~**
3. **~~האם עוצמת קבוצת כל התת קבוצות של המספרים הטבעיים שווה ל-~~**
4. **~~עוצמת קבוצת תתי הקבוצות הסופיות של קבוצת המספרים הטבעיים?~~**
5. **~~עוצמת קבוצת תתי הקבוצות הקו-סופיות של קבוצת המספרים הטבעיים?~~**